רן לנצט

לוגיקה מודאלית

1. לוגיקה מודאלית תחשיב-פסוקית: T, S4 ו-S5

1.1 סימני השפה הם אלה של תחשיב הפסוקים, בתוספת הסימנים הבאים:

$\Box$ ("הכרחי ש...");

$\Diamond$ ("אפשרי ש...");

1.2 הגדרת נב"כ:

1. כל משתנה פסוקי הוא נב"כ.
2. אם α ו-β נב"כ, אז כך גם צירופיהם הפסוקיים ($\alpha\supset\beta$, $\alpha\&\beta$ וכו').
3. אם α נב"כ, אז כך גם $\Box\alpha$.
4. שום דבר אחר אינו נב"כ.

1.3 הגדרת "אפשרי ש": $\Diamond\alpha =_{df} \sim\Box\sim\alpha$

1.4 המערכת T (לפעמים היא נקראת M)

אקסיומות:

0. כל הטאוטולוגיות של תחשיב-הפסוקים הן אקסיומות של T.
1. אקסיומות ההכרח: כל הנוסחאות מהצורה: $\Box\alpha\supset\alpha$.
2. אקסיומות הפילוג: כל הנוסחאות מהצורה: $\Box(\alpha\supset\beta)\supset(\Box\alpha\supset\Box\beta)$.

כללי ההיסק:

1. מודוס פוננס: $\dfrac{\alpha\supset\beta \quad \alpha}{\beta}$
2. כלל ההכרח (Necessitation): $\dfrac{\alpha}{\Box\alpha}$

יכיחות ב-T מסומנת כך: $\vdash_T \alpha$. הסימון עבור יכיחות ב-S4 וב-S5 דומה.

1.5 המערכת S4:

מורכבת מכל כללי ההיסק והאקסיומות של T, בתוספת האקסיומות האופייניות של S4:

כל הנוסחאות מהצורה $\Box\alpha \supset \Box\Box\alpha$.

1.6 <u>המערכת S5</u>:

מורכבת מכל כללי ההיסק והאקסיומות של T, בתוספת <u>האקסיומות האופייניות של S5</u>:

כל הנוסחאות מהצורה $\Diamond\alpha \supset \Box\Diamond\alpha$.

2. <u>סמנטיקה עבור לוגיקות מודאליות תחשיב-פסוקיות</u>

2.1 <u>הגדרה</u>: <u>מבנה עבור T</u> (או: מבנה-T, או בקיצור: מבנה) הוא שלשה סדורה $<G, K, R>$ שבה:

- K קבוצה, שנקראת <u>קבוצת העולמות האפשריים</u> של המבנה;
- $G \in K$. האובייקט G נקרא <u>העולם האקטואלי</u> של המבנה;
- R יחס רפלקסיבי על K. היחס R נקרא <u>יחס הנגישות</u> של המבנה.

2.2 <u>הגדרה</u>: <u>מודל</u> על מבנה $<G, K, R>$ הוא פונקציה דו-מקומית $\varphi(p, w)$ שמתאימה ערך אמת לכל נוסחה אטומית (משתנה פסוקי) p ועולם אפשרי w.

2.3 <u>הגדרה</u>: יהי φ מודל על מבנה $<G, K, R>$. ערך האמת של נוסחה α בעולם w של המודל, $\varphi(\alpha, w)$, נקבע באופן הבא:

1. אם α נוסחה אטומית, אז ערך האמת $\varphi(\alpha, w)$ קבוע כבר—ראה הגדרת "מודל".
2. נניח כי α מורכבת מהנוסחאות β ו-γ, ושערכי האמת של β ו-γ בכל עולם נקבעו כבר.

א. אם α היא צירוף פסוקי של β ו-γ, אז ערך האמת שלה בכל עולם נקבע כמו בתחשיב הפסוקים. למשל:

$$\varphi(\beta\vee\gamma, w) = F \quad \text{iff} \quad \varphi(\alpha, w) = \varphi(\beta, w) = F.$$

ב. אם α היא $\Box\beta$, אז ערך האמת שלה נקבע כך:

$\varphi(\Box\beta, w) = T$ אס"ם לכל עולם $w' \in K$ שנגיש מ-w, מתקיים $\varphi(\beta, w') = T$.

2.4 <u>הגדרה</u>: נוסחה α היא <u>תקפה ב-T</u> אם מתקיים התנאי הבא: לכל מבנה $<G, K, R>$, ולכל מודל φ על מבנה כזה, $\varphi(\alpha, G) = T$.

סימון: $\vDash_T \alpha$.

2.5 <u>משפט הנאותות והשלמות עבור T</u>: לכל נוסחה α, $\vdash_T \alpha$ אס"ם $\vDash_T \alpha$.

2.6 <u>הגדרה</u>: <u>מבנה עבור S4</u> (מבנה S4) הוא מבנה-T שיחס הנגישות שלו, בנוסף להיותו רפלקסיבי, הוא גם טרנזיטיבי.

2.7 <u>הגדרה</u>: נוסחה α היא <u>תקפה ב-S4</u> אם מתקיים התנאי הבא: לכל מבנה $\langle G, K, R\rangle$ עבור S4, ולכל מודל φ על מבנה כזה, $\varphi(\alpha, G) = T$.

סימון: $\vDash_{S4} \alpha$.

2.8 <u>משפט הנאותות והשלמות עבור S4</u>: לכל נוסחה α, $\vdash_{S4} \alpha$ אס"ם $\vDash_{S4} \alpha$.

2.9 <u>הגדרה</u>: <u>מבנה עבור S5</u> (מבנה S5) הוא מבנה-T שיחס הנגישות שלו הוא יחס שקילות.

2.10 <u>הגדרה</u>: נוסחה α היא <u>תקפה ב-S5</u> אם מתקיים התנאי הבא: לכל מבנה $\langle G, K, R\rangle$ עבור S5, ולכל מודל φ על מבנה כזה, $\varphi(\alpha, G) = T$.

סימון: $\vDash_{S5} \alpha$.

2.11 <u>משפט הנאותות והשלמות עבור S5</u>: לכל נוסחה α, $\vdash_{S5} \alpha$ אס"ם $\vDash_{S5} \alpha$.

3. <u>לוגיקה מודאלית מסדר ראשון</u>

3.1 <u>הגדרה</u>: <u>סגוֹר</u> של נוסחה α הוא כל נוסחה סגורה המתקבלת מ-α על ידי הוספת סימני הכרח ו/או כמתים כוללים, בכל סדר שהוא.

3.2 <u>המערכת T המכומתת של קריפקה</u>

א. <u>האקסיומות</u> של T הן כל הסגוֹרים של כל הנוסחאות מהצורות הבאות:

(0) טאוטולוגיות תחשיב-פסוקיות (כמו: $\forall xPx \vee \sim\forall xPx$).

(1) $\Box\alpha \supset \alpha$

(2) $\Box(\alpha\supset\beta) \supset (\Box\alpha\supset\Box\beta)$

(3) $\alpha \supset \forall x\alpha$, כאשר x אינו מופיע חופשי ב-α.

(4) $\forall x[\alpha(x)\supset\beta(x)] \supset [\forall x\alpha(x)\supset\forall x\beta(x)]$

(5) $\forall y[\forall x\alpha(x)\supset\beta(y)]$

ב. כלל ההיסק היחיד: מודוס פוננס.

3.3 <u>המערכת S4 המכומתת</u>

מתקבלת מ-T (המכומתת) על-ידי הוספת האקסיומות הבאות: כל הסגורים של כל הנוסחאות מהצורה $\Box\alpha \supset \Box\Box\alpha$.

3.4 <u>המערכת S5 המכומתת</u>

מתקבלת מ-T (המכומתת) על-ידי הוספת האקסיומות הבאות: כל הסגורים של כל הנוסחאות מהצורה $\Diamond\alpha \supset \Box\Diamond\alpha$.

4. <u>סמנטיקה ללוגיקה מודאלית מכומתת</u>

4.1 <u>הגדרה</u>: <u>מבנה-T מכומת</u> הוא מבנה $<G, K, R>$ יחד עם פונקציה ψ, המתאימה לכל $w \in K$ קבוצה כלשהי, הנקראת <u>התחום של w</u>.

4.2 <u>הגדרה</u>: <u>מודל מכומת</u> על מבנה-T מכומת $<G, K, R>$ הוא פונקציה דו-מקומית $\varphi(P, w)$ ש"מקבלת" פרדיקט n-מקומי P ועולם $w \in K$, ופועלת באופן הבא:

א. אם P פרדיקט 0-מקומי (כלומר: משתנה פסוקי), אז $\varphi(P, w) \in \{T, F\}$.

ב. אם P פרדיקט חד-מקומי, אז $\varphi(P, w) \subseteq U$, כאשר הקבוצה U היא האיחוד של כל התחומים, של כל העולמות האפשריים של המבנה: $U = \bigcup_{H \in K} \psi(H)$.

ג. אם P פרדיקט n-מקומי, $n > 1$, אז $\varphi(P, w) \subseteq U^n$.

4.3 <u>הגדרה</u>: יהי φ <u>מודל מכומת</u> על מבנה-T $<G, K, R>$, תהי $U = \bigcup_{H \in K} \psi(H)$, ונניח כי נתונה התאמה של אובייקט מ-U לכל אחד מהמשתנים. ערך האמת של נוסחה α בעולם $w \in K$ הוא תמיד אחד מבין T ו-F. ערך זה מסומן ב-$\varphi(\alpha, w)$, ונקבע באופן הבא:

א. אם α אטומית:

1) אם α משתנה פסוקי, אז $\varphi(\alpha, w)$ קבוע כבר—ראה הגדרת "מודל מכומת".

2) אם α נוסחה מהצורה $P(x_1,\ldots,x_n)$, ו-$a_1,\ldots,a_n$ הם האובייקטים המתאימים ל-$x_1,\ldots,x_n$ (בהתאמה), אזי: $\varphi(P(x_1,\ldots,x_n), w) = T$ אס"ם $<a_1,\ldots,a_n> \in \varphi(P, w)$.

ב. אם α היא צירוף פסוקי של נוסחאות, אז $\varphi(\alpha, w)$ נקבע כמו בתחשיב הפסוקים. למשל: $\varphi(\beta \,\&\, \gamma, w) = T$ אס"ם $\varphi(\beta, w) = \varphi(\gamma, w) = T$.

ג. אם α מהצורה $\Box\beta$, אז:

$\varphi(\Box\beta, w) = T$ אס"ם $\varphi(\beta, w') = T$ לכל עולם w' שנגיש מ-w.

ד. נניח כי α מהצורה $\forall x\beta(x,y_1,\ldots,y_n)$, כאשר β אינה מכילה משתנים חופשיים מלבד $x, y_1, \ldots, y_n$. נניח כי האובייקטים המתאימים למשתנים $y_1, \ldots, y_n$ הם $b_1, \ldots, b_n$. אזי:

$\varphi(\forall x\beta(x,y_1,\ldots,y_n), w) = T$ אס"ם: לכל $a \in \psi(w)$ (כלומר: לכל a בתחום של w), ההתאמה של $a,b_1,\ldots,b_n$ ל-$x,y_1,\ldots,y_n$ נותנת $\varphi(\beta(x,y_1,\ldots,y_n)) = T$.

4.4 <u>הגדרה</u>: נוסחה סגורה α היא <u>תקפה</u> ב-T אם לכל מודל מכומת φ על מבנה-T מכומת $\langle G, K, R\rangle$ מתקיים $\varphi(\alpha, G) = T$.

סימון: $\vDash_T \alpha$.

4.5 <u>משפט הנאותות והשלמות עבור T המכומתת</u>: לכל נוסחה סגורה α, $\vdash_T \alpha$ אס"ם $\vDash_T \alpha$.

4.6 <u>הגדרה</u>: מבנה-S4 מכומת הוא מבנה-T מכומת שיחס הנגישות שלו, בנוסף להיותו רפלקסיבי, הוא גם טרנזיטיבי.

4.7 <u>הגדרה</u>: מבנה-S5 מכומת הוא מבנה-T מכומת שיחס הנגישות שלו הוא יחס שקילות.

4.8 <u>הערה</u>: תקפות ב-S4 וב-S5 מוגדרת כמו ב-T.

4.9 <u>משפט הנאותות והשלמות של S4 המכומתת</u>: לכל נוסחה סגורה α, $\vdash_{S4} \alpha$ אס"ם $\vDash_{S4} \alpha$.

4.10 <u>משפט הנאותות והשלמות של S5 המכומתת</u>: לכל נוסחה סגורה α, $\vdash_{S5} \alpha$ אס"ם $\vDash_{S4} \alpha$.

—סוף—