רן לנצט

מושגים בסיסיים

רקע למפגש ה-15.12.10

הפגישה הקרובה תוקדש ל"יישור קו" בלוגיקה מודאלית. "יישור הקו" הזה יניח היכרות עם מספר מושגים תורת-קבוצתיים פשוטים, ועם מספר צורות כתיבה מקובלות. נושאים אלה יוצגו בקצרה להלן. הנושאים המוצגים כאן: סימון מקובל עבור קבוצות, הסימון המקובל עבור איברות בקבוצה, איחוד של קבוצות, תת-קבוצה, זוג סדור, n-יה סדורה, מכפלה קרטזית, יחס על קבוצה, ייצוג גראפי של יחס, יחס רפלקסיבי, יחס סימטרי, יחס טרנזיטיבי, יחס שקילות, פונקציה.

- <u>סימון מקובל עבור קבוצות</u>: $\{x \mid P(x)\}$ היא קבוצת כל הדברים שיש להם התכונה P.

  דוגמה: $\{x \mid$ x מספר שלם וגם x מתחלק ב-2$\}$ היא קבוצת כל המספרים הזוגיים.
- <u>יחס האיברות בקבוצה</u>: אם A קבוצה ו-a אובייקט ששייך לקבוצה הזו, אומרים ש-a הוא <u>איבר</u> של A, וכותבים: $a \in A$.
- <u>איחוד של שתי קבוצות</u>: אם A ו-B קבוצות, אז האיחוד של שתיהן, $A \cup B$, הוא קבוצת כל האובייקטים השייכים לאחת לפחות מבין הקבוצות A ו-B. במלים אחרות:

  $A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \text{or} \quad x \in B\}$.
- <u>איחוד של משפחת קבוצות</u>: אם F היא משפחה (קבוצה) של קבוצות, אז האיחוד של F הוא קבוצה כל האובייקטים השייכים לאחת לפחות מבין הקבוצות ב-F. האיחוד הזה מסומן ב-$\bigcup F$, ולעיתים ב-$\bigcup_{A \in F} A$.
- <u>תת-קבוצה</u>: נניח ש-A ו-B קבוצות. A היא <u>תת-קבוצה</u> של B אם כל איבר של A הוא איבר של B.

  סימון: $A \subseteq B$.

  <u>דוגמה</u>: קבוצת כל המספרים הזוגיים היא תת-קבוצה של קבוצת כל המספרים השלמים.
- <u>זוג סדור</u> הוא סדרה באורך 2. הזוג הסדור שהרכיב הראשון שלו הוא a והשני הוא b מסומן ב-$\langle a,b \rangle$.
- <u>n-יה סדורה</u> היא סדרה באורך n. ה-n-יה הסדורה שהרכיב הראשון שלה הוא a_1, הרכיב השני שלה הוא a_2, ..., והרכיב ה-n-י שלה הוא a_n מסומנת ב-$\langle a_1,\ldots,a_n \rangle$.
- <u>מכפלה קרטזית של שתי קבוצות</u>: אם A ו-B קבוצות, אז <u>המכפלה הקרטזית</u> של A ב-B היא קבוצת כל הזוגות הסדורים שהרכיב הראשון שלהם שייך ל-A והשני ל-B. המכפלה הזו מסומנת ב-$A \times B$.

  בקיצור: $A \times B = \{\langle x,y \rangle \mid x \in A \quad \text{and} \quad y \in B\}$.

- מכפלה קרטזית של n קבוצות: אם $A_1,\dots,A_n$ קבוצות, אז:

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{<x_1,\dots,x_n> \mid x_1 \in A_1 \;\text{ and }\; x_2 \in A_2 \;\text{ and }\; \dots \;\text{ and }\; x_n \in A_n\}$.

- מקרה פרטי: מכפלה קרטזית של קבוצה בעצמה: אם A קבוצה, אז המכפלה הקרטזית של A בעצמה n פעמים נכתבת בקיצור כ-A^n. מכפלה זו היא קבוצת כל הn-יות הסדורות שכל רכיביהן שייכים ל-A: $A^n = \{<x_1,\dots,x_n> \mid x_1 \in A \;\text{ and }\; x_2 \in A \;\text{ and }\; \dots \;\text{ and }\; x_n \in A\}$.

- יחס על קבוצה נתונה: יחס R על קבוצה A הוא קבוצת זוגות סדורים ששני רכיביהם שייכים ל-A. (במלים אחרות: R הוא יחס על A אס״ם $R \subseteq A \times A$.)

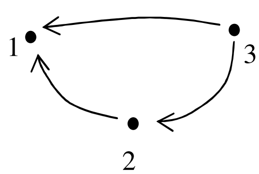
הערה: המושג שהוגדר כאן הוא המושג האקסטנסיונאלי של יחס: יש כאן, בעצם, זיהוי של היחס עם האקסטנסיה שלו, שהיא קבוצת כל הזוגות הסדורים שהיחס מתקיים בין הרכיב הראשון שלהם לבין הרכיב השני. ניקח, לדוגמה, דבר שאינטואיטיבית היינו קוראים לו יחס: היחס ״מבוגר מ״ על קבוצת כל בני האדם. היחס הזה קובע קבוצת זוגות סדורים: קבוצת כל הזוגות של אנשים שהראשון בהם מבוגר מהשני. אם אנחנו מקבלים את המושג האקסטנסיונאלי של יחס (כמו שבאמת נעשה להלן), אז קבוצת הזוגות הזו היא היא היחס עצמו: אין ביחס (במובן האקסטנסיונאלי) שום דבר שלא נתון לנו על-ידי קבוצת הזוגות הזו.

- צורת כתיבה מקובלת: כדי לציין שהאובייקט a נמצא ביחס R עם האובייקט b (כלומר: כדי לציין ש-$<a, b> \in R$) נכתוב aRb.

דוגמה מוכרת: אם R הוא היחס > (כלומר: היחס ״גדול מ״) על קבוצת כל המספרים השלמים, אז כדי לציין שהיחס הזה מתקיים בין 30 ל-5 (30 גדול מ-5), כותבים: $30 > 5$.

- ייצוג גראפי של יחס: אם R יחס על קבוצה A (כלומר: קבוצת זוגות סדורים שרכיביהם מ-A), נוח לפעמים לייצג את R באופן הבא: מייצגים את איברי A כנקודות, וכדי לציין שהיחס R מתקיים בין איבר a לאיבר b של A, מציירים חץ מ-a ל-b.

דוגמה: ניקח $A = \{1, 2, 3\}$, ונניח ש-R הוא היחס ״גדול מ״ על A. במלים אחרות: $R = \{<2,1>, <3,2>, <3,1>\}$. את היחס הזה נוכל לייצג גראפית בצורה הבאה:



- יחס רפלקסיבי: יחס R על קבוצה A נקרא רפלקסיבי אם כל איבר של A מקיים את היחס עם עצמו. במלים אחרות: אם לכל $a \in A$ מתקיים aRa.

דוגמאות: יחס הגרירה הלוגית הוא יחס רפלקסיבי על קבוצת כל הנוסחאות הסגורות בלוגיקה מסדר ראשון, כי כל נוסחה כזו גוררת לוגית את עצמה.

נגדיר: נוסחה α בתחשיב הפסוקים סותרת נוסחה β אם אין אף שורה בטבלת האמת המשותפת לשתיהן שבה גם α וגם β אמיתיות. היחס "סותרת את" המוגדר כך אינו יחס רפלקסיבי על קבוצת כל הנוסחאות של תחשיב הפסוקים, כי לא כל נוסחה סותרת את עצמה.

- יחס סימטרי: יחס R על קבוצה A נקרא סימטרי אם, עבור כל שני איברים של A, אם היחס מתקיים בין הראשון מביניהם לבין השני, אז הוא מתקיים גם בין השני לראשון. במלים אחרות:

R סימטרי אם לכל $a, b \in A$ מתקיים: אם aRb, אז bRa.

דוגמאות: "שקולה לוגית ל" הוא יחס סימטרי על קבוצת כל הנוסחאות של תחשיב הפסוקים, כי אם נוסחה α שקולה לוגית לנוסחה β, אז β שקולה ל-α.

היחס "גדול או שווה ל" על קבוצת כל המספרים השלמים אינו יחס סימטרי, כי, למשל: $8 \geq 5$, אבל אין זה נכון ש-$5 \geq 8$.

- יחס טרנזיטיבי: יחס R על קבוצה A נקרא טרנזיטיבי (או: עוֹבר) אם לכל $a, b, c \in A$ מתקיים התנאי הבא: אם aRb וגם bRc, אזי aRc.

דוגמאות: היחס "גדול מ" על קבוצת כל המספרים השלמים הוא טרנזיטיבי, כי לכל a, b ו-c שלמים, אם $a > b$ וגם $b > c$ אזי $a > c$.

היחס "חבר של" על קבוצת כל אזרחי ישראל אינו יחס טרנזיטיבי: אין זה נכון שלכל a, b ו-c אזרחי ישראל, אם a חבר של b ו-b חבר של c אז a חבר של c.

- יחס שקילות: יחס R על קבוצה A נקרא יחס שקילות אם הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

דוגמה: דמיון משולשים הוא יחס שקילות על קבוצת כל המשולשים במישור, כי היחס הזה רפלקסיבי (כל משולש דומה לעצמו), סימטרי (אם משולש אחד דומה לשני, אז גם השני דומה לראשון) וטרנזיטיבי (אם משולש אחד דומה לשני, והשני לשלישי, אז הראשון דומה לשלישי).

- פונקציה f מקבוצה A לקבוצה B היא כלל התאמה, המתאים לכל איבר של A איבר אחד ויחיד של B.

אם f פונקציה מ-A ל-B ו-$a \in A$, אז האיבר (היחיד) של B המתאים ל-a מסומן ב-f(a). כמו כן: הקבוצה A נקראת התחום של הפונקציה f.

דוגמה: נתאים ערך אמת לכל זוג סדור של ערכי אמת לפי הפירוט הבא:

$<T, T> \quad \rightarrow \quad T$

$<T, F> \quad \rightarrow \quad F$

$<F, T> \quad \rightarrow \quad F$

$<F, F> \quad \rightarrow \quad T$

כלל ההתאמה הזה הוא פונקציה מהקבוצה $\{T, F\}^2$ (כלומר: $\{T, F\} \times \{T, F\}$) לקבוצה $\{T, F\}$, כי לכל איבר של $\{T, F\}^2$ מותאם כאן איבר יחיד של $\{T, F\}$.

אם נסמן ב-f את הפונקציה שהגדרנו כאן, אז, למשל: $f(<T, F>) = F$.

הערה: בדוגמה שלעיל, תחום הפונקציה היה קבוצה של זוגות סדורים. במקרים כאלה, אומרים לפעמים שהפונקציה היא דו-מקומית, ובמקום לכתוב, למשל, f(<T, F>), כותבים בקיצור f(T, F).

—סוף—